

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:  
«Κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής στο  $x_0$ , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$ .

**β)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A, B$  αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**γ)** Για κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**δ)** Αν  $0 < \alpha < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$ .

**ε)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$  και  $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ,  $x \neq 1$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν  $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ ,  $x \in (0,1)$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν  $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $\varphi$  και να τη σχεδιάσετε.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -\eta\mu x$ ,  $x \in [0, \pi]$ , και το σημείο  $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  που άγονται από το  $A$ , τις οποίες και να βρείτε.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Αν  $(\varepsilon_1)$ :  $y = -x$  και  $(\varepsilon_2)$ :  $y = x - \pi$  είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$  και τη γραφική παράσταση της  $f$ , και να

αποδείξετε ότι  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$ , όπου:

- $E_1$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$ ,  $(\varepsilon_2)$ , και
- $E_2$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$ .

**Μονάδες 4**

Γ4. Να αποδείξετε ότι  $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta \mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[-1, \pi]$  και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

**Μονάδες 5**

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τη γραφική παράσταση της  $g$ , με  $g(x) = e^{5x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τον άξονα  $y'y$  και την ευθεία  $x = \pi$ .

**Μονάδες 6**

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση  $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$ .

**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**